

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală a județului Alba, 13 februarie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a V-a

Problema 1. Se consideră șirul: 1, 5, 9, 13, 17, ...

- Completați șirul cu încă doi termeni.
- Arătați că termenul al 13-lea este egal cu $1 + 4 \cdot 12$, iar termenul al 14-lea este egal cu $1 + 4 \cdot 13$.
- Calculați suma primilor 200 termeni.

Soluție. a) 21, 25 2 puncte
 b) verificare directă: $49 = 1 + 4 \cdot 12$ și $53 = 1 + 4 \cdot 13$ 1 punct
 c) termenul al 200-lea: $1 + 4 \cdot 199 = 797$ 1 punct
 numărul termenilor: $199 + 1 = 200$ 1 punct
 $2S = (1 + 797) + (5 + 793) + (9 + 789) + \dots + (797 + 1)$ 1 punct
 Finalizare $S = 798 \cdot 200 : 2 = 79.800$ 1 punct

Problema 2. Se consideră numărul natural: $N = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2014} + 3^{2015}$.

- Arătați că numărul N este divizibil cu patru.
- Aflați restul împărțirii numărului N la 11^2 .

Soluție. a) $N = (1 + 3) + 3^2 \cdot (1 + 3) + \dots + 3^{2014} \cdot (1 + 3)$ 2 puncte
 $N = \mathcal{M}_4$ 2 puncte
 b) $2016 = \mathcal{M}_5 + 1$ 1 punct
 $N = 1 + 3 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{2011} \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$ 1 punct
 $N = \mathcal{M}_{121} + 1$ 1 punct

Problema 3. Determinați primele patru cifre și numărul cifrelor egale cu 0(zero) ale numărului natural
 $a = (3^4 \cdot 6^{2014} \cdot 5^{2015} + 3^3 \cdot 15^{2015} \cdot 2^{2016} - 3^{2014} \cdot 10^{2015}) : 3^{2014} + 2015$.

Soluție. $a = (3^4 \cdot 6^{2014} \cdot 5^{2015} + 3^3 \cdot 15^{2015} \cdot 2^{2016} - 3^{2014} \cdot 10^{2015}) : 3^{2014} + 2015$
 $a = (2^{2014} \cdot 3^{2018} \cdot 5^{2015} + 2^{2016} \cdot 3^{2018} \cdot 5^{2015} - 2^{2015} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}) : 3^{2014} + 2015$...2 puncte
 $= 2^{2014} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015} \cdot (3^4 + 2^2 \cdot 3^4 - 2) : 3^{2014} + 2015 =$ 1 punct
 $= 2015 \cdot 10^{2014} + 2015 =$ 1 punct
 $= 2015 \underbrace{00 \dots 00}_{2010 \text{ cifre}} 2015$ 1 punct

Primele patru cifre sunt 2, 0, 1 și 5 iar numărul cifrelor egale cu 0 este egal cu 2012. 2 puncte

Problema 4. Un număr natural de cel puțin patru cifre are proprietatea că, **dacă se elimină ultimele două cifre, atunci numărul se micșorează de 101 ori.**

- Demonstrați că dacă numărul are patru cifre, atunci cel mult două cifre sunt distincte.
- Câte numere naturale de patru cifre au proprietatea din enunț.
- Demonstrați că orice număr natural cu proprietatea din enunț are exact patru cifre.

Soluție. a) $\overline{abcd} = 101 \cdot \overline{ab}$ 1 punct

$100\overline{ab} + \overline{cd} = 101 \cdot \overline{ab}$ 1 punct

$\overline{cd} = \overline{ab}$ 0,5 puncte

$c = a$ și $d = b$ 0,5 puncte

b) Numărul numerelor naturale este egal cu numărul numerelor de două cifre, deci este egal cu 90. 2 puncte

c) $n = 100 \cdot q + r$, $0 \leq r \leq 99$, $q \geq 10$ 0,5 puncte

$101 \cdot q = 100 \cdot q + r$, $0 \leq r \leq 99$, $q \geq 10$ 0,5 puncte

$q = r$, $0 \leq r \leq 99$, $q \geq 10$ 0,5 puncte

$1010 \leq 101 \cdot r \leq 9999$

$1010 \leq n \leq 9999$ 0,5 puncte

Observații:

- Există și numere naturale de trei cifre cu proprietatea că, dacă se elimină ultimele două cifre, atunci numărul se micșorează de 101 ori. Acestea sunt numerele naturale de forma: $\overline{a0a}$.
- Dacă în enunțul problemei nu se punea condiția ca numărul natural să aibă cel puțin patru cifre, atunci ultima cerință trebuia să fie:

c) Demonstrați că orice număr natural cu proprietatea din enunț are trei sau patru cifre.

Demonstrație:

$n = 100 \cdot q + r$, $0 \leq r \leq 99$, $q \geq 1$ 0,5 puncte

$101 \cdot q = 100 \cdot q + r$, $0 \leq r \leq 99$, $q \geq 1$ 0,5 puncte

$q = r$, $0 \leq r \leq 99$, $q \geq 1$ 0,5 puncte

$101 \leq 101 \cdot r \leq 9999$

$101 \leq n \leq 9999$ 0,5 puncte